

УДК 517.5

**БАЗИСЫ ИЗ ЭКСПОНЕНТ, СИНУСОВ И КОСИНУСОВ
В ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ПЕРЕМЕННЫМ
ПОКАЗАТЕЛЕМ СУММИРУЕМОСТИ**

З.Г.ГУСЕЙНОВ

Сумгаитский Государственный Университет

huseynov_zg@mail.ru

В данной работе изучаются базисные свойства систем экспонент, косинусов и синусов, отличающихся от обычных систем линейным возмущением, в Лебеговых пространствах функций с переменным показателем суммируемости. При некоторых условиях на показатель суммируемости доказаны теоремы о полноте, минимальности и базисности рассмотренных систем функций.

Ключевые слова: Лебеговы пространства функций с переменным показателем суммируемости, полнота систем, минимальность систем, базисность систем.

В работе рассматриваются вопросы базисности систем экспонент

$$\left\{ e^{i(n-\alpha \cdot \text{sign}n)t} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad (1)$$

$$1 \cup \left\{ e^{i(n-\alpha \cdot \text{sign}n)t} \right\}_{n \neq 0}, \quad (2)$$

косинусов $\{\cos(n-\alpha)t\}_{n \geq 0}$ и синусов $\{\sin(n-\alpha)t\}_{n \geq 1}$ в Лебеговых пространствах функций с переменным показателем суммируемости $p(t)$, обозначаемых как L_p , где $\alpha \in \mathbb{C}$ комплексный параметр, \mathbb{Z} - множество целых чисел. Системы (1), (2) являются модельными для изучения спектральных свойств некоторых дифференциальных операторов. Они получаются из обычной системы экспонент линейным возмущением. Видимо, впервые к изучению базисных свойств этих систем обратились известные математики Пэли-Винер [1], Н.Левинсон [2] и др. В обычных пространствах Лебега L_p ($p(t) \equiv \text{const}$) базисные свойства систем (1), (2) полностью изучены. Относительно касающихся вопросов можно рассмотреть работы [2-5]. Последнее время в связи с рассмотрением некоторых конкретных задач механики и математической физики (см., напр., [6]) интерес к изучению тех или иных вопросов в пространствах L_p или W_p^k возрос.

Пусть $p: [-\pi, \pi] \rightarrow [1, +\infty)$ некоторая измеримая по Лебегу функция.

Класс всех измеримых на $[-\pi, \pi]$ (относительно лебеговой меры) функций обозначим через \mathcal{L}_0 . Примем обозначение

$$I_p(f) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p(t)} dt.$$

Положим $\mathcal{L} \equiv \{f \in \mathcal{L}_0 : I_p(f) < +\infty\}$. Относительно обычных линейных операций сложения функций и умножения на число \mathcal{L} превращается в линейное пространство. По норме

$$\|f\|_{p_i} \equiv \inf \left\{ \lambda > 0 : I_p\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\},$$

при $p^+ = \sup_{[-\pi, \pi]} p(t) < +\infty$, \mathcal{L} является банаховым и его обозначим через L_{p_i} . Обозначим

$$H^{\text{ln}} \equiv \left\{ p : \exists C > 0; \quad \forall t_1, t_2 \in [-\pi, \pi], |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |p(t_1) - p(t_2)| \leq \frac{C}{-\ln|t_1 - t_2|} \right\}.$$

Через $q(t)$ обозначим сопряженную к $p(t)$ функцию: $\frac{1}{p(t)} + \frac{1}{q(t)} \equiv 1$.

Примем: $p^- = \inf_{[-\pi, \pi]} p(t)$, $p^\pi = \max\{p(\pi); p(-\pi)\}$, $p_\pi = \min\{p(\pi); p(-\pi)\}$.

1. Базисы из экспонент. Справедливо

Утверждение 1. Пусть $p(t) \in H^{\text{ln}}$; $p^- > 1$, и выполнено неравенство

$$-\frac{1}{2p^\pi} < \alpha < \frac{1}{2q^\pi}. \quad (3)$$

Тогда система (1) полна и минимальна в L_{p_i} .

Используя это утверждение доказывается

Теорема 1. Пусть $p(t) \in H^{\text{ln}}$; $p^- > 1$, и выполнено неравенство

$$-\frac{1}{2p^\pi} < \alpha < \frac{1}{2q^\pi}.$$

Тогда система экспонент (1) образует базис в L_{p_i} .

Схема доказательства этой теоремы такова. По утверждению 1 при выполнении неравенства (3) система (1) полна и минимальна в L_{p_i} . Биортогональная к (1) система явно строится. Рассматриваются частичные биортогональные суммы произвольной функции из L_{p_i} . Используя ограниченность сингулярного интеграла в весовом классе L_{p_i} , доказывается равномерная ограниченность соответствующих проекторов. Далее, применяется критерий базисности.

Также верна следующая

Теорема 2. Пусть $p(t) \in H^{\text{ln}}$; $p^- > 1$. Система (1) полна в L_{p_t} только тогда, когда $\alpha \geq -\frac{1}{2p_\pi}$; минимальна в L_{p_t} только при $\alpha < \frac{1}{2q^\pi}$.

При этом доказывается, что при $-\frac{1}{2p_\pi} \leq \alpha \leq -\frac{1}{2p^\pi}$ система (1) не образует базис в L_{p_t} , хотя по теореме 2 она полна и минимальна. В классическом случае $p(t) = \text{const}$, значит $p_\pi = p^\pi$, и поэтому отрезок $\left[-\frac{1}{2p_\pi}, -\frac{1}{2p^\pi}\right]$ вырождается в точку. Естественно в общем случае это не так. Это явление можно трактовать как эффект, вызванный с переменчивостью значений функции $p(t)$ на концах отрезка $[-\pi, \pi]$.

Используя идею Н.Левинсона и теорему 1 доказываем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $p(t) \in H^{\text{ln}}$; $p^- > 1$. Система (2) образует базис в L_{p_t} только тогда, когда $-\frac{1}{2p^\pi} < \alpha < \frac{1}{2q^\pi}$. Более того, она полна в L_{p_t} только при $\alpha \geq -\frac{1}{2p_\pi}$; минимальна только тогда, когда $\alpha < \frac{1}{2q^\pi}$. При $-\frac{1}{2p_\pi} \leq \alpha \leq -\frac{1}{2p^\pi}$ она полна и минимальна, но в L_{p_t} не образует базис.

2. Базисы из синусов и косинусов. Рассмотрим системы из синусов

$$\{\sin(n - \alpha)t\}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (4)$$

и косинусов

$$1 \cup \{\cos(n - \alpha)t\}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (5)$$

$$\{\cos(n - \alpha)t\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (6)$$

в $L_{p_t}(0, \pi) \equiv L_{p_t}^0$, где $p: [0, \pi] \rightarrow [1, +\infty)$ некоторая измеримая функция, $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть

$$\tilde{p}(t) \equiv \begin{cases} p(t), & t \in [0, \pi], \\ p(-t), & t \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

Без доказательства приведем следующие утверждения, установления которых требуют не особых усилий.

Утверждение 2. Система экспонент (2) полна, минимальна, образует базис в $L_{\tilde{p}_t}$ только тогда, когда системы синусов (4) и косинусов (5) одновременно полны, минимальны, образуют базисы в $L_{p_t}^0$, соответственно.

Утверждение 3. Система экспонент

$$\left\{ e^{i(n-\alpha \cdot \text{sign} n)t} \right\}_{n \neq 0} \quad (7)$$

полна, минимальна, образует базис в $L_{\tilde{p}_t}^0$ только тогда, когда системы синусов (4) и косинусов

$$\{\cos(n-\alpha)t\}, \quad n=1,2,\dots;$$

одновременно полны, минимальны, образуют базисы в $L_{p_t}^0$, соответственно.

Совершенно очевидно, что умножение каждого члена системы (7)

на функцию $e^{-i\frac{t}{2}}$ не влияет на базисные свойства этой системы. Сделаем соответствующее преобразование имеем:

$$e^{-i\frac{t}{2}} \left\{ e^{-i(\alpha-1)t} e^{int}; e^{i\alpha t} \cdot e^{-ikt} \right\}_{n \geq 0; k \geq 1} \equiv \left\{ e^{i(n-\tilde{\alpha} \text{sign} n)t} \right\}_{n=-\infty}^{+\infty}, \quad (8)$$

$$\text{где } \tilde{\alpha} = \alpha - \frac{1}{2}.$$

А теперь предположим, что $p \in H^{\text{ln}}$, где

$$H_0^{\text{ln}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ p : \exists c > 0; \forall t_1, t_2 \in [0, \pi], |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |p(t_1) - p(t_2)| \leq \frac{c}{-\ln|t_1 - t_2|} \right\}.$$

Нетрудно заметить, что тогда $\tilde{p} \in H_0^{\text{ln}}$. Применив теорему 1 к системе (8)

получаем, что при $-\frac{1}{2\tilde{p}^\pi} < \tilde{\alpha} < \frac{1}{2\tilde{q}^\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{2\tilde{q}_\pi} < \alpha < \frac{1}{2\tilde{q}^\pi} + \frac{1}{2}$ система (8), а знач-

ит, система (7) образует базис в $L_{\tilde{p}_t}$. По Утверждению 4 система синусов (4) в этом случае образует базис в $L_{p_t}^0$. Ясно, что $\tilde{p}^\pi = \tilde{p}_\pi = p(\pi)$ и $\tilde{q}^\pi = \tilde{q}_\pi = q(\pi)$.

В результате получаем, что если имеет место

$$-\frac{1}{2p(\pi)} < \tilde{\alpha} < \frac{1}{2q(\pi)} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2q(\pi)} < \alpha < \frac{1}{2q(\pi)} + \frac{1}{2},$$

то система (4) образует базис в $L_{p_t}^0$. Базисность системы (4) при $\alpha = \frac{1}{2q(\pi)}$

доказывается с помощью интерполяционной теоремы Рисса-Торина, совершенно аналогично работе [3]. Остальные случаи доказываются по предыдущей схеме. Таким образом, справедлива

Теорема 4. Пусть $p \in H_0^{\text{ln}}$, $\min_t p(t) > 1$. Система синусов (4) образу-

ет базис в $L_{p_t}^0$ только тогда, когда $-\frac{1}{2p(\pi)} < \alpha < \frac{1}{2q(\pi)} + \frac{1}{2}$. Полна в

$$L_{p,}^0 \Leftrightarrow \alpha \geq -\frac{1}{2p(\pi)}; \text{ минимальна в } L_{p,}^0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2q(\pi)} + \frac{1}{2}.$$

Аналогичные результаты устанавливаются для систем косинусов (5), (6).

Автор выражает глубокую благодарность проф. Б.Т.Билалову за оказанное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964, 268 с.
2. Седлецкий А.М. Биортогональные разложения в рядах экспонент на интервалах вещественной оси // Усп. мат. наук, 1982, т. 37, в. 5 (227), с.51-95.
3. Моисеев Е.И. Базисность системы экспонент, косинусов и синусов в L_p // ДАН СССР, 1984, т. 275, №4, с. 794-798.
4. Билалов Б.Т. Базисность некоторых систем экспонент, косинусов и синусов // Дифференц. уравн., 1990, т. 26, №1, с. 10-16.
5. Билалов Б.Т. Базисные свойства некоторых систем экспонент, косинусов и синусов // Сиб.мат.журн., 2004, т.45, №2, с.264-273.
6. Xianling F., Dun Z. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$ // Journal of Math. Anal. and Appl., 2001, 263, p. 424-446.
7. Билалов Б.Т., Велиев С.Г. Некоторые вопросы базисов. Баку: Элм, 2010, 304 с.

DƏYİŞƏN CƏMLƏNMƏ DƏRƏCƏSİNƏ MALİK LEBEQ FƏZALARINDA EKSPONENT, KOSİNUS VƏ SİNUS SİSTEMLƏRİNİN BAZİSLİYİ

Z.Q.HÜSEYNOV

XÜLASƏ

Baxılan məqalədə dəyişən cəmlənmə dərəcəsinə malik Lebeq fəzalarında eksponent, sinus və kosinus sistemlərinin bazislik xassələri öyrənilmişdir. Cəmlənmə dərəcəsi üzərinə müəyyən şərtlər qoymaqla bu sistemlərin tamlığı, minimallığı və bazisliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.

Açar sözlər: dəyişən cəmləmə dərəcəsinə malik Lebeq fəzaları, tam sistemlər, minimal sistemlər, bazis təşkil edən sistemlər.

BASES OF EXPONENT, COSINE AND SINE FUNCTIONS IN THE LEBESQUE SPACES WITH VARIABLE SUMMABILITY

Z.G.HUSEYNOV

SUMMARY

The paper studies basic properties of exponent, cosine and sine systems in the Lebesgue spaces with variable summability degree. The theorems about the completeness, minimality and basesness of the considered systems under summability conditions are proved.

Key words: variable summability degree in the Lebesgue spaces, completeness system, minimality system, basesness system.

Поступила в редакцию 14.10.2009 г.

Принято к печати 10.03.2011 г.